

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 17 - כבידה וכוח מרכזי

תוכן העניינים

1. תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד
2. חוקי קפלר
3. תרגילים נוספים
4.
5.

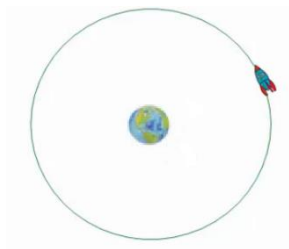
תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד:

שאלות:



(1) טיל יוצא מכדה"א וחוזר

- טיל נורה מכדור הארץ.
הטיל מתרחק מכדור הארץ וחוזר אליו בחזרה.
נתון שבאיזושהי נקודה במסלול המרחק של הטיל מכדה"א הוא R_1 .
נתונה הזווית בין R_1 למהירות באותו הרגע v_1 היא 30 מעלות.
רדיוס כדה"א הוא R_E וזווית הפגיעה של הטיל בכדה"א היא θ .
א. מצא את: v_0, v_1, v_2, θ_0 . מהירות פגיעת הטיל בכדה"א.
ב. חשב את: $R_{\max}$ (המרחק המקסימלי של הטיל מכדה"א).
ו- $v_{\min}$ (המהירות באותה נקודה).



(2) חלק עף במהירות מילוט

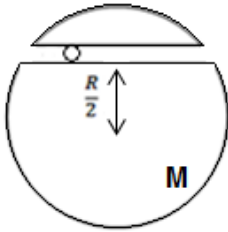
- חללית בעלת מסה m סובבת את כדה"א במסלול מעגלי ברדיוס R . ברגע מסוים החללית מתפצלת לשני חלקים. אחד החלקים בעל מסה של שליש m עף בכיוון הרדיאלי במהירות המילוט.
מצא את הרדיוס המינימלי והמקסימלי של החלק השני.

(3) פוטנציאל אפקטיבי

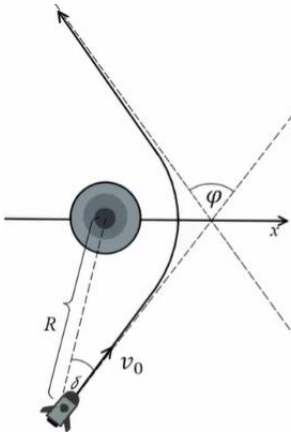
- גוף בעל מסה m נע בתנועה מעגלית תחת השפעת הפוטנציאל: $U(r) = -\frac{A}{\sqrt{r}}$
כאשר A קבוע נתון. נתון גם התנע הזוויתי של הגוף L .
א. מצא את רדיוס המעגל.
ב. מצא את מהירות הגוף.

(4) זמן מחזור

- גוף בעל מסה m נע בקו ישר (מימד אחד) תחת הפוטנציאל: $U(x) = B|x|$.
נתון כי המרחק המקסימלי אליו מגיע הגוף הוא A .
א. מצא את ערך האנרגיה הכללית של הגוף.
ב. מצא את זמן המחזור.

**(5) גוף זז במנהרה במרחק מהמרכז**

גוף נע במנהרה הנמצאת במרחק $\frac{R}{2}$ ממרכז כדור בעל מסה M .
הגוף מתחיל ממנוחה בקצה המנהרה ואין חיכוך.
מצא את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

**(6) מדידת מסה של חור שחור**

חור שחור הינו גוף שמימי כבד מאוד.

כדי למדוד את המסה M של חור שחור הנמצא במרחק גדול מאוד R מאתנו ובמנוחה ביחס אלינו, יורים לעברו טיל בעל מסה m הקטנה מאוד ביחס למסת החור.

המהירות ההתחלתית של הטיל היא v_0 והיא מוסטת בזווית δ קטנה מאוד לכיוון המדויק אל החור.

מכשור שנמצא על הטיל יכול להורות לנו מה הזווית ϕ אליו הוסט הטיל לאחר זמן רב ביחס לזווית ממנה התחיל. ניתן להניח כי האנרגיה הפוטנציאלית במרחק R זניחה.

א. מהי האקסצנטריות של מסלול הטיל סביב החור השחור?

מהו סוג המסלול? (מעגל, אליפסה או היפרבולה).

ב. מהי הזווית של מהירות הטיל לאחר שהתרחק מאוד מהחור ביחס לציר ה- x ?

ג. מצא קשר בין הזווית של סעיף ב' ל- ϕ ובטא את מסת החור באמצעות: ϕ, δ, v_0, R, m .

תשובות סופיות:

(1) ראה סרטון.

(2) ראה סרטון.

$$(3) \quad r_0 = \left(\frac{2L^2}{mA} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad v = \frac{L}{m \left(\frac{2L^2}{mA} \right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{ב.} \quad T = 8A \sqrt{\frac{2B}{m}}$$

$$(4) \quad E(x_{\max}) = 0 + B \cdot A \quad \text{א.}$$

$$(5) \quad x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} t \right)$$

$$(6) \quad \text{א. היפרבולה,} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2 R \sin \delta}{GM} \right)^2} \quad \text{ב.} \quad \cos \theta = -\frac{1}{\varepsilon}$$

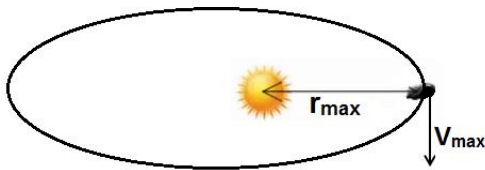
$$\text{ג.} \quad M = \frac{1}{G} v_0^2 R \sin \delta \tan \frac{\varphi}{2}$$

חוקי קפלר:

שאלות:

(1) מציאת זמן מחזור

גוף נע סביב השמש במסלול אליפטי כך שמהירותו המקסימאלית ומרחקו המינימלי מהשמש נתונים. נתון גם שטח האליפסה שעושה הגוף. מצא את זמן המחזור של הגוף.

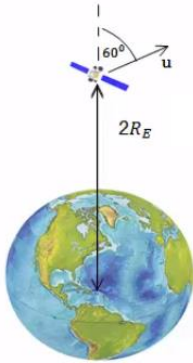


תשובות סופיות:

$$T = \left(\frac{r_{\min} v_{\max}}{2S} \right)^{-1} \quad (1)$$

תרגילים נוספים:

שאלות:



1) לוויין נכנס למסלול אליפטי

- לוויין נורה אנכית מפני כדה"א.
 הלוויין מגיע לשיא גובה של $2R_E$.
 ברגע זה ניתנת לו מהירות בכיוון 60° מעלות עם האנך
 לכדור הארץ שגודלה u .
 (התעלם מסיבוב ותנועת כדור הארץ).
 א. מצא תנאי על המהירות u כך שהלוויין ישאר במסלול סגור.
 ב. מצא תנאי נוסף על u כך שהלוויין לא יפגע בכדור הארץ.

2) יקום דו מימדי

ביקום דו מימדי פועל כוח שמרכזו בנקודה (x_0, y_0)

וגודלו: $\frac{k}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^{\frac{3}{4}}}$. כיוון הכוח הוא תמיד לכיוון מרכזו.

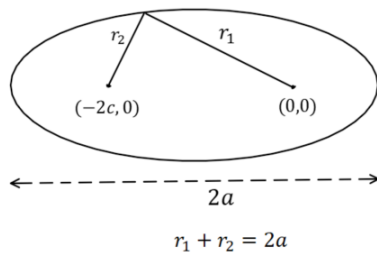
א. האם הכוח הוא כוח משמר? אם כן, מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח.

חשב את העבודה שמבצע הכוח על מסה M אשר נעה בין הנקודה (x_1, y_1) לבין הנקודה (x_2, y_2) .

ב. מסה M נמצאת במיקום (Bx_0, By_0) ויש לה מהירות: $\vec{v} = A(\hat{x} + \hat{y})$.
 מה תהיה מהירות המסה כשהמרחק בינה לבין מרכז הכוח יהיה d ?
 (A, B, d גדולים מאפס).

ג. מסה M נמצאת במרחק r_1 ממרכז הכוח.
 למסה מהירות v_1 וידוע שהמסה נמצאת בשיווי משקל בכל זמן.
 מצא קשר בין v_1 לבין r_1 .

ד. פצצה בעלת מסה M מסתובבת סביב מרכז הכוח וברגע שגודל המהירות שלה הוא v_2 והמרחק שלה הוא r_2 , כיוון המהירות מאונך לכיוון המיקום שלה ביחס למרכז הכוח. באותו הרגע הפצצה מתפוצצת לשני חלקים אחד בגודל m והשני בגודל $M-m$.
 החלק $M-m$ ממשיך באותו כיוון מהירות כמו לפני הפיצוץ.
 מה צריכה להיות מהירות החלק m על מנת שהחלק $M-m$ יהיה במרחק קבוע ממרכז הכוח לאחר הפיצוץ והלאה?

**(3) פיתוח משוואת האליפסה**

באליפסה סכום המרחקים של כל נקודה משני המוקדים של האליפסה הוא קבוע ושווה ל- $2a$ (רוחב האליפסה). נתונה אליפסה שהמוקדים שלה נמצאים בנקודות $(0,0)$ ו- $(-2c,0)$.

הראו כי משוואת האליפסה היא: $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ כאשר $\varepsilon = \frac{c}{a}$

$$r_0 = \frac{(a^2 - c^2)}{a}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } |u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}} \quad \text{ב. } \sqrt{\frac{GM}{2R_E}} < |u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}}$$

$$(2) \quad \text{א. משמר, } U(r') = -2kr'^{-\frac{1}{2}}, \text{ כאשר } r' = \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$W = 2k \left[\left((x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}} - \left((x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}} \right]$$

$$\text{ג. } v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} \quad \text{ב. } v = \left(2A^2 - \frac{4k}{m} \left[d^{-\frac{1}{2}} - (B-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_0^2 + y_0^2)^{-\frac{1}{4}} \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ד. אחורה } u_2 = \frac{1}{m}(M-m) \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} - \frac{M}{m} v_1$$

(3) הוכחה.